MA2115 Matemáticas IV (semi-presencial)
Práctica 04

Boris Iskra

enero – marzo 2010

1. **Variables Separables.**
2. **Ecuaciones ordinarias de primer orden.**

1. Variables Separables.
2. Ecuaciones ordinarias de primer orden.

Ejemplo 1

Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$(1+x^2)dy = \sqrt{1-y^2}dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\operatorname{arcsen}(y) = \arctan(x) + C$$

$$\boxed{\operatorname{arcsen}(y) - \arctan(x) = C}$$

Ejemplo 2

Halle la solución general de la ecuación diferencial $xy' = y + y^3$.

$$\frac{dy}{y(1+y^2)} = \frac{dx}{x}$$

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{-y}{1+y^2}\right) dy = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + \frac{-1}{2}\ln|1+y^2| = \ln|x| + A$$

$$\ln\left|\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right| = \ln|Bx|$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = Bx$$

$$\boxed{x = C\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}$$

Ejemplo 3

Halle la solución general de la ecuación diferencial $y - xy' = a(1 + x^2 y')$

$$y - a = (x + ax^2)y'$$

$$\frac{dx}{x + ax^2} = \frac{dy}{y - a}$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{-a}{1 + ax}\right) dx = \frac{dy}{y - a}$$

$$\ln|x| - \ln|1 + ax| + \ln(C_1) = \ln|y - a|$$

$$\ln\left|\frac{C_1 x}{1 + ax}\right| = \ln|y - a|$$

$$\frac{C_1 x}{1 + ax} = y - a$$

$$\boxed{y = \frac{a + Cx}{1 + ax}}$$

Ejemplo 4

Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$$

$$(1+x)ydx = (y-1)xdy$$

$$\frac{1+x}{x}dx = \frac{y-1}{y}dy$$

$$\ln|x| + x = y - \ln|y| + C$$

$$\boxed{\ln|xy| + x - y = C}$$

Ejemplo 5

Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$(1+y)dx = (1-x)dy$$

$$\frac{1}{1-x}dx = \frac{1}{1+y}dy$$

$$-\ln|1-x| + \ln|A| = \ln|1+y|$$

$$\ln\left|\frac{A}{1-x}\right| = \ln|1+y|$$

$$1+y = \frac{A}{1-x}$$

$$\boxed{y = \frac{C+x}{1-x}}$$

Ejemplo 6

Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$(t^2 - xt^2)\frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$$

$$(t^2 - xt^2)\frac{dx}{dt} = -\left(x^2 + tx^2\right)$$

$$\frac{1-x}{x^2}dx = -\frac{1+t}{t^2}dt$$

$$-\frac{1}{x} - \ln|x| + C = \frac{1}{t} - \ln|t|$$

$$C = \frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \ln|x| - \ln|t|$$

$$\boxed{\frac{x+t}{tx} + \ln\left|\frac{x}{t}\right| = C}$$

Ejemplo 7

Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$(x - y^2x)dx + (y - x^2y)dy = 0$$

$$y(1 - x^2)dy = -x(1 - y^2)dx$$

$$-\frac{y}{1 - y^2}dy = \frac{x}{1 - x^2}dx$$

$$\frac{\ln\left|1 - y^2\right|}{2} = -\frac{\ln\left|1 - x^2\right|}{2} + A$$

$$\ln\left|1 - y^2\right| + \ln\left|1 - x^2\right| = B$$

$$(1 - y^2)(1 - x^2) = C$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = x^2y^2 + D}$$

Ejemplo 8

Halle la solución de la ecuación diferencial

$$(1+e^x)yy' = e^x \text{ con } y(0)=1$$

$$ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x)+c$$

Sustituyendo $x=0, y=1$

$$\frac{1}{2} = \ln(2)+c$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x)+\frac{1}{2}-\ln(2)$$

$$\boxed{\frac{y^2}{2} = \ln\left((1+e^x)\frac{\sqrt{e}}{2}\right)}$$

1. Variables Separables.
2. **Ecuaciones ordinarias de primer orden.**

Ejemplo 1

Halle la solución general de la ecuación diferencial $y' + \dfrac{2y}{x} = x^2$

$$P(x) = \frac{2}{x} \qquad g(x) = x^2$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)g(x)dx + C\right) = \frac{1}{x^2}\left(\int x^2x^2dx + C\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^5}{5} + C\right)$$

$$\boxed{y = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}}$$

Ejemplo 2

Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$y' - a\frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$$

Factor integrante: $\mu(x) = e^{\int \frac{-a}{x}dx} = e^{-a\ln|x|} = x^{-a}$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)g(x)dx + C\right) = x^a\left(\int \frac{1}{x^a}\frac{x+1}{x}dx + C\right)$$
$$= x^a\left(\int \left(x^{-a} + x^{-a-1}\right)dx + C\right) = x^a\left(\frac{x^{1-a}}{1-a} - \frac{x^{-a}}{a} + C\right)$$

$$\boxed{y = \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a} + Cx^a}$$

Ejemplo 3

Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

Factor integrante: $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x+1}dx} = e^{-2\ln|x+1|} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)g(x)dx + C\right) = (x+1)^2\left(\int \frac{1}{(x+1)^2}(x+1)^3dx + C\right)$$
$$= (x+1)^2\left(\frac{(x+1)^2}{2} + C\right)$$

$$\boxed{y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2}$$

Ejemplo 4

$$(1+y^2)dx = \left(\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{sen}(y) - xy\right) dy$$

$$(1+y^2)\frac{dx}{dy} = \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{sen}(y) - xy$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{y}{1+y^2}x = \frac{\mathrm{sen}(y)}{\sqrt{1+y^2}} \text{ donde } P(y) = \frac{y}{1+y^2} \text{ y } g(y) = \frac{\mathrm{sen}(y)}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\text{Factor integrante: } \mu(y) = e^{\int \frac{y}{1+y^2}dy} = e^{\frac{1}{2}\ln|1+y^2|} = \sqrt{1+y^2}$$

$$x(y) = \frac{1}{\mu(y)}\left(\int \mu(y)g(y)dy + C\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left(\int \mathrm{sen}(y) + C\right) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}(-\cos(y) + C)$$

$$\boxed{x = \frac{-\cos(y) + C}{\sqrt{1+y^2}}}$$

Ejemplo 5

Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{ds}{dt}\cos(t) + s\,\mathrm{sen}(t) = 1$$

$$\frac{ds}{dt} + \tan(t)s = \sec(t)$$

Factor integrante: $\mu(t) = e^{\int \tan(t)dt} = e^{-\ln|\cos(t)|} = \sec(t)$

$$s(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)g(t)dt + C\right) = \cos(t)\left(\int \sec^2(t)dt + C\right)$$
$$= \cos(t)\left(\tan(t) + C\right)$$

$$\boxed{y = \mathrm{sen}(t) + C\cos(t)}$$

Ejemplo 6

Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n$$

Factor integrante: $\mu(x) = e^{-\int \frac{n}{x}dx} = e^{-n\ln|x|} = \frac{1}{x^n}$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)g(x)dx + C\right) = x^n\left(\int \frac{1}{x^n}e^x x^n dx + C\right)$$
$$= x^n\left(e^x + C\right)$$

$$\boxed{y = x^n\left(e^x + C\right)}$$

Ejemplo 7

Halle la solución general de la ecuación diferencial

$$y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$$

Factor integrante: $\mu(x) = e^{\int \frac{1-2x}{x^2}dx} = e^{-\frac{1}{x} - \ln(x^2)} = \dfrac{1}{x^2 e^{1/x}}$

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)g(x)dx + C\right) = x^2 e^{1/x}\left(\int \frac{e^{-1/x}}{x^2}dx + C\right)$$

$$= x^2 e^{1/x}\left(e^{-1/x} + C\right)$$

$$\boxed{y = x^2\left(1 + Ce^{1/x}\right)}$$

FIN